Konstruktion af det ottende Skæringspunkt mellem de Flader af anden Orden, som gaa gjennem syv givne Punkter.

Af

H. G. Zeuthen.

(Meddelt den 3. December 1880.)

Hertil Tavle VII.

I et Arbejde, som vil blive indrykket i 18de Bind af Mathematische Annalen, om projektive Figurer paa en Flade af anden Orden, har jeg som en Anvendelse af de deri givne Undersøgelser udledet en Konstruktion af det ottende Skæringspunkt mellem de Flader af anden Orden, som gaa gjennem syv givne Punkter. Da denne Konstruktion, som nedenfor meddeles som første Opløsning, eller i det mindste den Modifikation af samme, som meddeles under anden Opløsning, forekommer mig simplere end de andre mig bekjendte Løsninger af samme Opgave, turde den nok fortjene en Udledelse og Fremstilling, som er uafhængig af den vidtløftigere Theori, hvortil den er knyttet i den nævnte Afhandling. Den dertil benyttede Hjælpesætning har maaske ligeledes nogen Interesse, blandt andet ogsaa af den Grund, at den, som det skal vises, foruden til min Konstruktion fører til Paul Serrets Løsning af samme Opgave[1])

[1]) *Géométrie de Direction* p. 314. Denne Løsning, hvor sex Brianchonske Sexkanter benyttes, staar i Simpelhed ved Siden af min første Opløsning, hvor sex Pascalske Sexkanter benyttes. Til her at citere den frem

og saaledes gjør den uafhængig af den smukke, men ejendommelige Theori for Flader af anden Orden, hvortil den er knyttet i *Géométrie de Direction*, og derved mere tilgængelig.

Jeg vil ved 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 betegne saadanne otte Punkter, hvorigjennem alle de Flader af anden Orden gaa, som gaa gjennem de syv. Siderne i den i Almindelighed vindskæve Firkant 1 2 3 4 1 betegner jeg ved a, b, c, d, og deres Spor paa Planen 5 6 7 ved A (Sporet af 1 2), B, C, D. Naar dette erindres, vil medfølgende Figur, som fremstiller Planen 5 6 7, og hvor den i anden Opløsning givne Konstruktion er gjennemført, kunne benyttes under hele Læsningen.

Hvor det modsatte ikke udtrykkelig siges, forudsætter jeg, at ikke fire af de otte Punkter ligge i samme Plan. I det specielle Tilfælde, hvor fire ligge i samme Plan, véd man, at de fire andre ogsaa gjøre det. Ligge fem af Punkterne i samme Plan, bliver det ottende Punkt et vilkaarligt Punkt af Keglesnittet gjennem disse. Ligge tre Punkter i en ret Linie, bliver det et vilkaarligt Punkt af denne Linie. Ligge endelig de syv Punkter paa en Rumkurve af tredie Orden, bliver det et vilkaarligt Punkt af denne.

Hjælpesætning.

Naar Punkterne 2, 3, 5, 6, 7 ere givne, medens 1 og 4 ere beliggende paa givne Linier a og c gjennem 2 og 3, vil Planen 1 4 8 gaa gjennem et fast Punkt F af Planen 5 6 7.

I. **Antalgeometrisk Bevis.** Vi ville søge Klassen af den Flade, der berører alle Planer 1 4 8. Dette kan ske derved, at

---

for andre ældre Opløsninger er der saa meget mere Grund som min, som det vil ses, har meget tilfælles med den. Om dette fælles end hos mig er fremgaaet direkte af mine i *Mathematische Annalen* fremsatte, fra Serrets fuldstændig forskjellige Undersøgelser, har Simpelheden af Serrets Løsning været mig en Spore til at simplificere en mere sammensat Løsning, hvortil jeg først var kommen.

vi søge Antallet af Planer 148, der gaa gjennem en vilkaarlig valgt fast ret Linie. Vi ville hertil vælge en Linie, der skærer a i et Punkt M og c i et Punkt N, af hvilke hverken det ene eller det andet falder paa nogen af de Stillinger af 14, for hvilke Planen 148 bliver ubestemt, saaledes at, idet vi forudsætte, at a og c ikke skære hinanden, MN ikke kan skære nogen af de omtalte Stillinger af 14. Et saadant Valg af M og N er muligt; thi Ubestemtheden af Planen 148 indtræder kun, naar 1 og 4 ligge ud i en ret Linie med et af Punkterne 5, 6, 7, eller naar de ligge paa en Rumkurve af tredie Orden gjennem 2, 3, 5, 6, 7, der vil være fuldkommen bestemt ved at skulle skære a og c endnu én Gang. At 1 eller 4 falder sammen med 2 eller 3, giver ikke Anledning til nogen Ubestemthed, idet a eller c da bliver Tangent til Fladerne i 2 eller 3.

Gjennem Linien MN gaar den Plan 148, hvis Punkt 1 falder i M, og hvis Punkt 4 falder i N. Hvis der tillige skulde gaa en anden Plan 148 derigjennem, hvis Punkt 4 var et andet Punkt af c end Punktet N, maatte Planen indeholde hele Linien c altsaa ogsaa Punktet 3. Idet altsaa de fire Punkter 1, 3, 4, 8 laa i samme Plan, om hvilken vi ifølge vore Forudsætninger om M og N kunne antage, at den er fuldkommen bestemt ved Linien 14, maatte ogsaa de øvrige Punkter af Gruppen 2, 5, 6, 7 ligge i samme Plan; men dette strider mod Forudsætningerne. Den søgte Flade er altsaa af første Klasse eller reduceres til et Punkt F. Alle Planerne gaa saaledes gjennem samme Punkt.

Lader man nu Punkterne 1 og 4 være Sporene A og C af Linierne a og c paa Planen 567, vil Punktet 8 være et vilkaarligt Punkt af Keglesnittet AC567. Planen 148 falder altsaa sammen med 567, og Punktet F maa ligge i denne Plan. Sætningen er saaledes bevist.

Lader man 1 og 4 være de Punkter af a og c, som ligge ud i en ret Linie med F, skal ifølge den fundne Sætning Planen 148 være ubestemt. Punktet F maa altsaa enten være et af Punkterne 5, 6, 7, eller Sporet af Forbindelseslinien mellem de Punkter 1' og 4' af *a* og *c*, som ligge paa en Rumkurve af tredie Orden gjennem 2, 3, 5, 6, 7. Det første er ikke Tilfældet; thi naar enhver Plan 1 4 8 gik igjennem 5, maatte 2, 3, 6, 7 ligge i samme Plan. Den sidste Antagelse, som vi have fremhævet, er altsaa den rigtige.

II. **Geometrisk Bevis for Hjælpesætningen.** Vi ville begynde med at lade Punktet 1 ligge fast, medens alene 4 bevæger sig paa Linien *c* gjennem 3. Man kan da lægge en Rumkurve af tredie Orden r_3 gjennem de faste Punkter 1, 2, 3, 5, 6, 7. Idet Linien *c* skærer denne én Gang, nemlig i 3, vil der existere en fuldkommen bestemt Hyperboloide $\varphi = (c, r_3)$, som indeholder c og r_3. En Hyperboloide er nemlig fuldkommen bestemt ved at gaa igjennem Rumkurven r_3 og to Dobbeltsekanter, og vælger man to, som skære *c* (i andre Punkter end 3), vil den helt indeholde *c*, da den ellers vilde skære den i tre Punkter.

Give vi nu 4 en bestemt Stilling paa Linien *c*, kan man lægge uendelig mange Hyperboloider gjennem 4 og Rumkurven r_3. Disse ville skære φ i Rumkurven r_3 og den Dobbeltsekant til samme, *m*, som gaar gjennem 4. Denne maa ogsaa gaa gjennem 8; thi dette Punkt kan bestemmes ved Skæring mellem disse Hyperboloider og en ny Flade af anden Orden gjennem 1, 2, 3, 5, 6, 7, 4, og maa blive dennes andet Skæringspunkt med *m*.

Vi have saaledes bevist følgende to Sætninger, af hvilke den første (Hesses Theorem[1]) er bekjendt:

Lægger man gjennem sex af de otte Skæringspunkter 1, 2, 3, 5, 6, 7 mellem tre Flader af anden Orden en Rumkurve af tredie Orden r_3, ville de to andre 4 og 8 ligge paa en Dobbeltsekant til denne.

---

[1]) Crelles Journal 26de Bd. S. 151. Foruden Hesse benytter Picquet i Borchardts (Crelles) Journal 73de Bd. S. 367 den samme Sætning til Løsning af den her behandlede Opgave.

Ligge Punkterne 1, 2, 3, 5, 6, 7 fast, medens 4 bevæger sig paa en ret Linie c gjennem 3, vil den bevægelige Linie 4 8 være Frembringer i en fast Hyperboloide φ gjennem Rumkurven r_3.

Idet nu Frembringeren 4 8 skærer Frembringeren af anden Frembringelse f gjennem Punktet 1, vil Planen 1 4 8, idet Punktet 1 ligger fast, dreje sig om Linien f. Give vi derefter 1 nye Stillinger paa Linien a gjennem 2, faas for hver af disse en ny Linie f gjennem det tilsvarende Punkt 1.

Ved i det her beviste at ombytte 2, 1, a med 3, 4, c, faar man, at naar 1 bevæger sig paa a, medens 4 ligger fast, vil Planen 1 4 8 dreje sig om en fast Linie f' gjennem 4, og til hver ny Stilling af 4 paa c svarer en ny Linie f'.

Det er indlysende, at enhver af Linierne f maa skære enhver af Linierne f'. Dette medfører, at Linierne f og f' maa danne Frembringerrækkerne i en vindskæv Hyperboloide eller i en Grænseform for en saadan. En egentlig Hyperboloide kan man ikke faa, da Linien a skærer alle Linierne f, og Linien c skærer alle Linierne f', og a og c saaledes maatte høre henholdsvis til Frembringerrækkerne f' og f; men dette er umuligt, da de ikke skære hinanden. Da man imidlertid vilde faa en egentlig Hyperboloide, hvis der var tre Linier f, som ikke skar hinanden, maa der være Linier f, som skære hinanden. Da nu Linierne f', der udgaa fra alle Punkter af c, ikke kunne ligge i samme Plan som to hinanden skærende Linier f, maa de alle gaa gjennem Skæringspunktet. Paa samme Maade ses det, at alle Linier f gaa gjennem det samme Punkt.

Det er saaledes godtgjort, at alle Planerne 1 4 8, hvoraf hver indeholder en Linie f og en Linie f', gaa gjennem et fast Punkt F.

For at bestemme dette Punkt F kan man søge de Linier f og f', som gaa gjennem Sporene A og C af Linierne a og c paa Planen 5 6 7. Hvis Punktet 1 ligger i A, vil Rumkurven r_3, som skal gaa igjennem 1, 2, 3, 5, 6, 7, her, hvor fire af dens

Punkter ligge i en Plan, opløse sig i et Keglesnit i denne Plan og en ret Linie, der skærer Keglesnittet. Den rette Linie maa være 23, og idet dennes Spor i Planen 567 er B, maa Keglesnittet være 567AB. Linien 48 skal nu være en Dobbeltsekant til denne Rumkurve; den skal altsaa skære Linien 23 og det fundne Keglesnit i Punkter forskjellige fra deres Skæringspunkt B. Idet Punktet 4 skal være et Punkt af Linien c (= 3 C), maa 48 altsaa gaa gjennem det fra B forskjellige Skæringspunkt H mellem Keglesnittet 567AB og Planen 234 eller dennes Spor BC. Dette skal, saalænge 1 falder i A, være Tilfældet med alle de Linier 48, som faas, idet 4 bevæger sig paa c, og da den fra A udgaaende Linie f skal skære dem alle, maa den falde sammen med AH.

Paa samme Maade ses, at den fra C udgaaende Linie f' gaar igjennem det fra B forskjellige Skæringspunkt K mellem BA og Keglesnittet 567BC.

Punktet F skal ligge paa begge de her fundne Linier f og f'. Det er altsaa, idet A, B, C ere Sporene paa Planen 567 af Linierne 12, 23, 34, Skæringspunktet mellem en Linie fra A til Linien BC's fra B forskjellige Skæringspunkt H med Keglesnittet 567AB og en Linie fra C til AB's fra B forskjellige Skæringspunkt K med Keglesnittet 567BC.

Denne Bestemmelse er den samme, som vi have faaet ved det antalgeometriske Bevis. Keglesnittene 567AB og 567BC ere nemlig Projektionerne fra 2 og 3 af den Rumkurve af tredie Orden, som gaar gjennem 2, 3, 5, 6, 7 og endnu skærer a og c i de ubekjendte Punkter 1' og 4'. Disse Keglesnits Skæringspunkter H og K med Sporene BC og AB af Planerne 234 og 123 blive da Spor af Linierne 24' og 31', og Linierne AH og CK af Planerne 21'4' og 31'4', deres Skæringspunkt F altsaa af Linien 1'4'.

Løsninger af Opgaven.

Punkterne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 antages givne, Punktet 8 søges.

I. **Første Opløsning.** Man bestemmer Sporene A, B, C, D af den vindskæve Firkant 1 2 3 4 1's Sider i Planen 5 6 7 og kan derefter ved Operationer alene i denne Plan bestemme Spor af Planer og Linier, som gaa igjennem det søgte Punkt 8. Sporet af Planen 1 4 8 skal gaa igjennem et ved A, B, C, 5, 6, 7 bestemt Punkt F, som efter det nys beviste kan findes ved to Anvendelser af Pascals Sætning til Konstruktion af et sjette Punkt af et Keglesnit. Paa vor Figur ere Sexkanterne $HB567AH$ og $KB567CK$, hvis Pascal'ske Linier ere punkterede, benyttede til Konstruktion af Linierne[1]) AH og CK, hvis Skæringspunkt er F. Linien DF vil dernæst være Sporet af Planen 1 4 8.

Paa samme Maade kan man bestemme Sporene af Planer, som forbinde to andre Sider i Firkanten 1 2 3 4 med det søgte Punkt 8. Bestemmelsen af de tre Punkter, hvorigjennem Sporene skulle gaa foruden igjennem bekjendte Punkter, kræver Anvendelsen af sex Pascal'ske Sexkanter, som dog have Sider fælles. De to, som vi have benyttet, have saaledes Siderne $B5$, 5 6, 6 7 fælles.

II. **Anden Opløsning.** I Stedet for at bestemme Punktet 8 som Skæringspunkt mellem tre Planer kan man, efter først som i den foregaaende Løsning at have bestemt en Plan 1 4 8 ved sit Spor DF, konstruere de paa denne Linie beliggende Spor P og Q af de to Linier fra 1 og 4, som skære hinanden i 8. Hertil kan man benytte det under det andet Bevis for Hjælpesætningen anførte Theorem af Hesse, ifølge hvilket Forbindelseslinien 2 3 mellem to af de otte Punkter er Dobbeltsekant til

---

[1]) Da Punkterne H og K kun spille en Rolle i Beviset, medens det er Linierne AH og CK, der benyttes i Konstruktionen, have vi paa Figuren vel mærket Beliggenheden af H, men forøvrigt kun draget det Stykke af Linien AH, som virkelig bruges.

Rumkurven af tredie Orden gjennem de andre 1, 4, 5, 6, 7, 8. Idet nu de Knipper, der projicere denne Rumkurves Dobbeltsekanter og Punkter fra 1 og 4, og altsaa ogsaa disse Knippers Spor, ere homografiske (projektiviske), ville de søgte Spor P og Q af 18 og 48 være de til hinanden svarende Punkter af DF i to homografiske Figurer, i hvilke Punkterne 5, 6, 7 svare til sig selv, medens Linien AB, som er Spor af Planen 123, svarer til Sporet BC af Planen 423.

Idet Punktet Q bliver Skæringspunktet mellem FD, og den Linie, som i den anden Figur svarer dertil, naar FD henregnes til den første, og P er Skæringspunktet mellem FD og den Linie, som i den første Figur svarer dertil, naar FD henregnes til den anden, kunne disse Punkter findes ved Hjælp af den Sætning, at naar to homografiske Figurer ere beliggende i samme Plan, er det geometriske Sted for Skæringspunkterne mellem de Linier, som gaa gjennem et fast Punkt, henregnede til den ene Figur, og de tilsvarende Linier i den anden et Keglesnit, der gaar igjennem det faste Punkt. Som det faste Punkt kunne vi først betragte Skæringspunktet G mellem FD og AB. Da ses, at G, B, Q, 5, 6, 7 ligge paa samme Keglesnit. Paa samme Maade faas, at Skæringspunktet I mellem FD og BC og Punkterne B, P, 567 ligge paa samme Keglesnit. Idet nu de her nævnte Punkter undtagen P og Q ere bekjendte, og disse ligge paa Linien GI gjennem et bekjendt Punkt af hvert Keglesnit, findes P og Q hvert ved en Pascalsk Sexkant.

Paa Figuren have vi benyttet Sexkanterne $QGB567Q$ og $PIB567P$. Idet de have fire Sider fælles, faa de et paa GI beliggende Pascalsk Punkt fælles, og da hver af dem har fire Sider fælles med en af de ved Konstruktionen af Punktet F benyttede Sexkanter, er for hver endnu et (paa 67 beliggende) Pascalsk Punkt allerede konstrueret.

Idet P og Q ere Sporene af Linierne 18 og 48, kan man let faa Sporene af to nye Planer gjennem 8: AP vil være Sporet af Planen 128, og CQ Sporet af 348. Deres Skæringspunkt R maa være Sporet af den Frembringer i Hyperboloiden gjennem de otte Punkter med a og c til Ledelinier, som gaar gjennem 8. Dette Punkt R maa altsaa ligge paa Keglesnittet gjennem A, C, 5, 6, 7, hvilket kunde benyttes som en Kontrol for nøjagtig Udførelse af Konstruktionen.

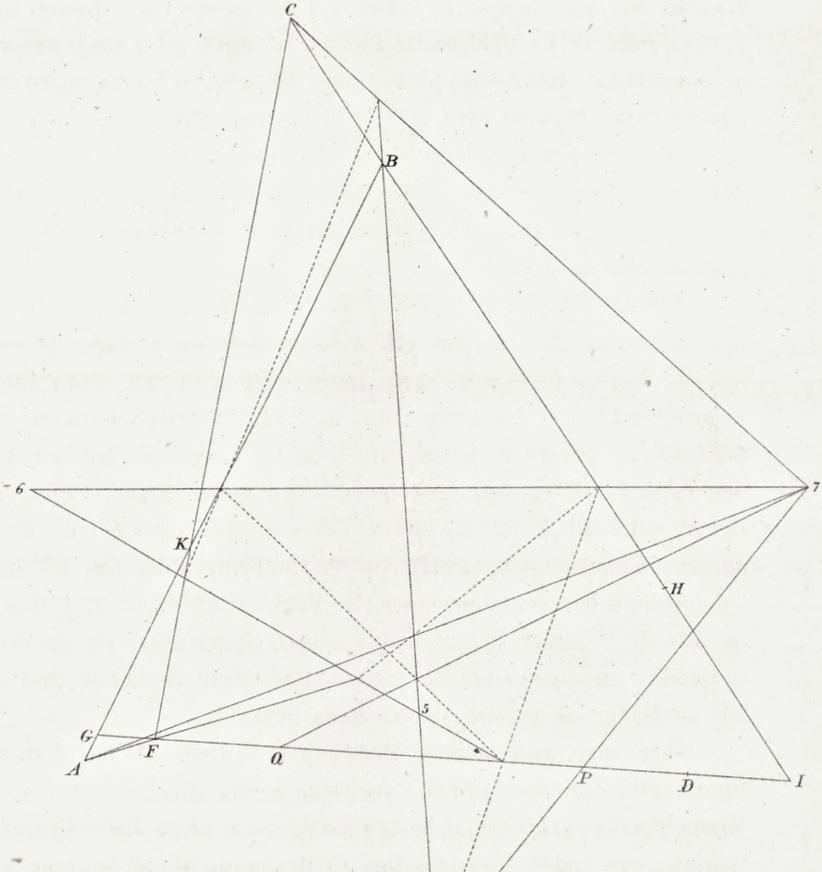
Følgesætning. Ved den her udførte Konstruktion af P og Q og derved af det nys omtalte Punkt R falder det i Øjnene, at Punktet D kun er benyttet én Gang, nemlig til Bestemmelse af Linien DF, og altsaa kan ombyttes med et hvilket som helst Punkt af denne Linie, uden at Punkterne P og Q og R derved flyttes. Idet D er Sporet af Linien 14, vil denne Linie, naar D bevæger sig paa Linien GI, og alt andet bliver uforandret, frembringe en Hyperboloide med a, c og GI til Ledelinier. Idet nu Sporet R af Frembringeren gjennem 8 i Hyperboloiden (a, c; 5, 6, 7) ligger fast, naar GI ligger fast, men gjennemløber Sporet $AC567$ af denne Hyperboloide, naar GI drejer sig om F, se vi, at naar Punkterne 2, 3, 5, 6, 7 ligge fast, medens 1 og 4 bevæge sig paa faste Linier a og c gjennem 2 og 3, og Punktet 8 bevæger sig paa en Frembringer i Hyperboloiden med Ledelinier a og c og gjennem 5, 6, 7, vil Linien 14 frembringe en Hyperboloide, der berører Planen 567. Denne Plan vil skære den efter Linien AC og en Linie gjennem det faste Punkt F.

III. **Paul Serrets Konstruktion.** Den af Paul Serret i *Géométrie de Direction* angivne Konstruktion kan udledes af de samme Sætninger, som vi her have anvendt. Denne Konstruktion gaar ligesom vor første Konstruktion ud paa at bestemme tre Punkter, der, forbundne med tre af Punkterne A, B, C, D, give Sporene af tre Planer gjennem 8. De tre konstruerede Punkter ere netop de samme, som vi have benyttet, og det vil derfor være tilstrækkeligt at udlede den Bestemmelse af F, som benyttes i Serrets Konstruktion.

Punktet F er, som alt bemærket, Sporet paa Planen 567 af den Linie, der forbinder de Punkter 1' og 4' af a og c, hvori disse Linier anden Gang skæres af en Rumkurve af tredie Orden gjennem 2, 3, 5, 6, 7. Denne kan bestemmes ved homografiske Knipper med Toppunkter i 2 og 3, og hvori Linier til 5, 6, 7, samt til de ubekjendte Punkter 1' og 4' af a og c svare til hinanden. Disse Knippers Spor i Planen 567 ville være to homografiske Figurer med 5, 6, 7 til Fællespunkter, og i hvilke A i den ene Figur svarer til et ubekjendt Punkt K af BA i den anden, og C i den anden Figur til et ubekjendt Punkt H af BC i den første. Det søgte Punkt F er Skæringspunktet mellem AH og CK.

AH og CK bestemmes ved Hjælp af den Sætning, at Indhyllingskurven for de rette Linier, som forbinde Punkter af en fast ret Linie, betragtede som hørende til den ene af to homografiske Figurer i samme Plan, med de tilsvarende Punkter af den anden, berøre et Keglesnit, som til Tangenter har baade den faste Linie og den tilsvarende i den anden Figur. Idet A og H svare til K og C, svare Linierne AH og CK til hinanden. Linierne AK og HC og de tre Fælleslinier 56, 67 og 75 forbinde til hinanden svarende Punkter af disse to Linier, og alle de 7 Linier berøre altsaa samme Keglesnit. Da de ere bekjendte undtagen AH og CK, kunne disse to Linier findes ved to Gange at anvende Brianchons Sexkant.

Naar man paa denne Maade har bestemt F og derved Sporet DF, kan man i Stedet for, som Serret gjør, ved fire nye Brianchonske Sexkanter at bestemme Sporene af to andre Planer, benytte vor anden Konstruktion til Bestemmelse af Sporene P og Q af 18 og 48. Ved denne Kombination blive Fordelene dog noget mindre, end naar DF er bestemt ved Pascalske Sexkanter.



Th. Bergh's lith. Inst.